

**Varianta 085**

**SUBIECTUL I**

- a)  $3\sqrt{15}$ .
- b) 2.
- c)  $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- d)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- e) Punctele sunt coliniare
- f) -4.

**SUBIECTUL II**

1.

- a) 0.
- b) 1.
- c)  $\frac{1}{6}$ .
- d) 4
- e)  $\frac{5}{4}$ .

2.

a)  $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} = \frac{2}{x^2 - 4x + 3}$ .

b)  $f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-3)^2}$ .

c)  $\frac{3}{16}$ .

d)  $\ln \frac{3}{2}$ .

e) 2

**SUBIECTUL III**

a)  $\det A = 0$ .

b)  $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 3A$ .

c) Matricea sistemului este  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ;  $\Delta = 0$ , atunci sistemul este compatibil nedeterminat

Fie  $y = a \in \mathbf{R}$ ; atunci  $x = -a \in \mathbf{R}$ .  $S = \{(-a, a) \mid a \in \mathbf{R}\}$ .

d) Din b) avem  $A^2 = 3A$ , deci verificarea este făcută.

Arătăm că  $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ .

Presupunem  $A^k = 3^{k-1} A$ ,  $\forall k \in \mathbf{N}^*$  Demonstrăm

$$A^{k+1} = 3^k A. A^{k+1} = A^k \cdot A = 3^{k-1} \cdot A \cdot A = 3^{k-1} \cdot A^2 = 3^{k-1} \cdot 3A = 3^k A, \text{ adevărată.}$$

Atunci  $A^n = 3^{n-1} A$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

$$\text{e) } (I_2 + A)(I_2 + aA) = I_2 + (4a+1)A = I_2. \text{ Deci ,}$$

$$4a+1=0 \text{ sau } a = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{f) Fie } B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}). AB = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+2c & 2b+2d \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} a+2b & a+2b \\ c+2d & c+2d \end{pmatrix}. \text{ Cum } AB \neq BA, \text{ obținem}$$

$$a+c \neq a+2b \text{ sau } b+d \neq a+2b \text{ sau } 2a+2b \neq c+2d \text{ sau } 2b+2d \neq c+2d. \text{ Avem}$$

$$c \neq 2b. \text{ Alegem } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{g) Din d), } A + A^2 + \dots + A^{2004} - A^{2005} = A + 3A + 3^2 A + \dots + 3^{2003} A - 3^{2004} A =$$

$$= A(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2003} - 3^{2004}) = A \left( \frac{3^{2004} - 1}{3 - 1} - 3^{2004} \right) = - \left( \frac{1 + 3^{2004}}{2} \right) A.$$

Deci matricea  $A + A^2 + \dots + A^{2004} - A^{2005}$  are toate elementele strict negative.

#### SUBIECTUL IV

$$\text{a) } \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x+1)^2+1} = \frac{x^2+2x+2-x^2-1}{[(x+1)^2+1][x^2+1]} = \frac{2x+1}{[(x+1)^2+1][x^2+1]}.$$

$$\text{b) } f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{2(x+1)}{(x^2+2x+2)^2}, \forall x \in \mathbf{R}.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0, \text{ rezultă că } y = 0 \text{ este asimptotă orizontală spre } +\infty.$$

$$\text{d) } f(1) = \frac{1}{1^2+1} - \frac{1}{2^2+1};$$

$$f(2) = \frac{1}{2^2+1} - \frac{1}{3^2+1};$$

.....

$$f(n) = \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1};$$

$$\text{Obținem } a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)^2+1}, \forall n \geq 1.$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2};$$

$$\text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} - a_n \right) \cdot n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(n+1)^2+1} \right) \cdot n^2 = 1.$$

$$\mathbf{g)} \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{(x+1)^2 + 1} \right) dx = \arctg x \Big|_0^1 - \arctg(x+1) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \arctg 2.$$